

ECUACIONES LINEALES

HISTORIA:

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), así como ecuaciones indeterminadas como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy enseñan. También fueron capaces de resolver algunas ecuaciones indeterminadas.

Los matemáticos alejandrinos Heron y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro "Las Aritméticas de Diofante" es de bastante más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó "Ciencia de reducción y equilibrio". (La palabra árabe al-jabru, que significa "reducción", es el origen de la palabra álgebra). En el siglo IX, el matemático Al-Jwarizmi escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo IX, el matemático egipcio AbuKamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar las x, y, z que cumplen: $x + y + z = 10$; $x^2 + y^2 = z^2$; $xz = y^2$

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas solo ocasionalmente; sin embargo; en la Edad Media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x , y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khyyam mostró como expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del álgebra de Al-Jwarizmi fue publicada en el XII. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica: $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN:

Una ecuación es una relación de igualdad que establece entre dos expresiones matemáticas que pueden tomar un mismo valor para un determinado conjunto de valores asignados a sus variables.

$$A_{(x; y; z; \dots; w)} = B_{(x; y; z; \dots; w)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A_{(x; y; z; \dots; w)} - B_{(x; y; z; \dots; w)}} = 0$$

$$\boxed{F_{(x; y; z; \dots; w)} = 0} \dots \dots \text{Forma General}$$

Ejemplo:

$$x^3 - x^2 - 2 = 0$$

$$x + \sqrt{x+3} = x^2$$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es aquel valor que, asignado a la variable de la ecuación, hace que la igualdad se cumpla.

Ejemplo:

$$2^x + 1 = x^2$$

Si: $x = 3 \Rightarrow 9 = 9$
 $\rightarrow 3$ es solución

CONJUNTO SOLUCIÓN (C.S.) DE UNA ECUACIÓN:

Es la reunión de todos los valores que verifican una ecuación:

Ejemplos:

Sea: $x^3 = x$

$x = 1 \rightarrow 1^3 = 1$ (V)

$x = 0 \rightarrow 0^3 = 0$ (V)

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 = -1$ (V)

\therefore C.S. = $\{-1 ; 0 ; 1\}$

Sea: $x^2 = 1$

\rightarrow C.S. = $\{-1 ; 1\}$

Sea: $\frac{1}{x} = 0$

\rightarrow C.S. = $\emptyset = \{ \}$

Observación:

Resolver una ecuación significa hallar su C.S.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES CLASIFICACIÓN DE ACUERDO A SU ESTRUCTURA

- ALGEBRAICAS

ECUACIÓN:

$x^5 + 2x^4 - 6x + 2 = 0$ Polinomial

$\frac{1}{x+2} + x + 3 + x^{-2} = 0$

Fraccionaria

$\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \cdot x^{1/3} = 0$ Irracional

- NO ALGEBRAICAS O TRASCENDENTES

ECUACIÓN:

$2^x + 1 = 0$ Exponencial

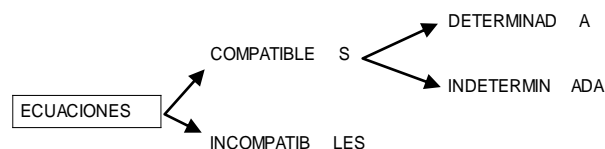
$\log(x+3) - 1 = 0$ Logarítmica

$\text{Sen}(\text{Cos } x) + 2 = 0$

Trigonométrica

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + = 0$ Etc.

CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS AL NÚMERO DE SOLUCIONES



ECUACIONES COMPATIBLES: Cuando existe solución:

- **Determinada:** El número de soluciones es finito.

Ejemplos:

• $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

\rightarrow C.S. = $\{1 ; 2 , 3\}$

- **Indeterminada:** El número de soluciones es infinito

Ejemplos:

• $Ox = 0$

\rightarrow C.S. = \mathbb{R}

• $x + y = 2$

$$\left. \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 1 & 0 & 2 & -3 & \dots \\ y & 1 & 2 & 0 & 5 & \dots \end{array} \right\} \text{C.S.} = \{(1 ; 1) ;$$

$(0 ; 2) ; (-3 ; 5) \dots\}$

ECUACIONES INCOMPATIBLES, INCONSISTENTES O ABSURDAS: Cuando

no existe solución:

Ejemplos:

• $0x = 6$

→ C.S. = \emptyset

• $x - 2 + \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{x - 2}$

→ C.S. = \emptyset

SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Para resolver cualquier tipo de ecuación debe tener presente las siguientes reglas:

Si a ambos miembros de una ecuación le sumamos o restamos una misma cantidad algebraica entera (o una constante), la nueva ecuación será equivalente a la primera. Pero cuando la expresión algebraica que se suma o resta es fraccionaria, la nueva ecuación será equivalente solo si al reemplazar cada una de las soluciones de la primera ecuación, la segunda siempre existe.

Si a ambos miembros de una ecuación se le multiplica o divide por un mismo número, la nueva ecuación resultante será equivalente a la primera.

Al multiplicar ambos miembros de una ecuación por otra expresión, la nueva ecuación no es equivalente a la primera; sin embargo, admite todas sus soluciones, introduce nuevas raíces a la ecuación resultante, que no son raíces de la primera.

Al elevar ambos miembros de una ecuación a una misma potencia (o al extraer la raíz del mismo índice), nos dará una nueva ecuación que no es equivalente a la primera, pero en sus soluciones están incluidas las soluciones de la primera ecuación.

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

$$ax = b$$

Donde: a, b : Parámetros
x : variable

• **Compatible Determinada**

$$\Leftrightarrow a \neq 0$$

Ejemplo: $5x = 0$

• **Compatible Indeterminada**

$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

Ejemplo: $0x = 0$

• **Incompatible**

$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

Ejemplo: $0x = 5$

Ejercicio: Analizar la siguiente ecuación:

$$(a - 3)(b + 2)x = (a - 3)(b + 4)$$

Ec. Determinada: $\Leftrightarrow a \neq 3 \wedge b \neq -2$

Ec. Indeterminada $\Leftrightarrow a = 3$

Ec. Incompatible $\Leftrightarrow b = -2 \wedge a \neq 3$

Ejercicio: Hallar "a" para que la ecuación sea incompatible:

Para que sea incompatible:

$$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0 \quad \wedge \quad 6a - a^2 - 8$$

$$(a - 1)(a - 2)(a - 3)x = (-a + 2)(a - 4)$$

$$(a = 1 \vee a = 2 \vee a = 3) \wedge 6a - a^2 - 8$$

$$\therefore a = 1 \quad \vee \quad a = 3$$

ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO:

Son aquellas que tienen por denominador una expresión Polinómica, no radical en uno o ambos miembros.

Ejemplos: $\frac{2}{3x-1} = \frac{3}{3x+1}$; $\frac{x}{3} - \frac{x^2 - 8x}{3x-6} = \frac{7}{9}$

Método de Solución:

- Se calcula el m.c.m. de los denominadores.
- Se multiplica ambos miembros de la ecuación el m.c.m. obteniéndose como resultado una ecuación entera.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- Se verifica si la solución hallada no hace que la ecuación se vuelva indeterminada.

Ejemplo: Resolver: $\frac{4}{7} + \frac{4}{2x-3} = 0$

Solución:

$$\text{m.c.m. } (7 ; 2x - 3) = 7(2x - 3)$$

Multiplicamos la ecuación original por el m.c.m.:

$$7(2x - 3) \left(\frac{4}{7} + \frac{4}{2x - 3} \right) = 0$$

Efectuando : $4(2x - 3) + 7(4) = 0$

Reduciendo : $8x - 12 + 28 = 0$

Transponiendo :

$$8x = -16$$

Dividiendo entre 8 : $x = -2$

Reemplazamos este valor en la ecuación

Original :

$$\frac{4}{7} = \frac{4}{2(-2) - 3} = 0$$

$$\frac{4}{7} - \frac{4}{7} = 0$$

Como el valor -2 lleva a la ecuación original a la indeterminación entonces su solución.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Dos o más ecuaciones forman un sistema cuando tiene las mismas soluciones.

La solución de un sistema de ecuaciones es todo conjunto de valores numéricos de las incógnitas que satisface al mismo tiempo a todas las ecuaciones.

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado

- **Método de Sustitución:**

Dado el sistema de ecuaciones con 2 incógnitas x e y:

$$a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \dots\dots\dots (2)$$

El método consiste en despejar de (1) ó (2) una incógnita. Así por ejemplo:

De (1): $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$

Luego, sustituir este valor en la otra ecuación:

$$\text{En (2): } a_2x + b_2\left(\frac{c_1 - a_1x}{b_1}\right) = c_2$$

Obteniéndose una ecuación equivalente con una incógnita, que despejada es:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Finalmente, para hallar y se sustituye el valor de x en una de las ecuaciones:

$$\text{En (1): } y = \frac{a_1c_2 - b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Método de reducción:

Dado el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots (2)$$

El método de reducción consiste en buscar que la incógnita que se desea eliminar tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, para lo cual se procede como sigue:

se multiplica por "b₂":

$$\Rightarrow a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$$

se multiplica por "b₁"

$$\Rightarrow a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$$

Luego se restan ambas ecuaciones, miembro a miembro:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Finalmente, reemplazando en (1) se obtiene:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ejemplo: Resolver: $3x + 5y = 2 \dots\dots\dots (1)$

$9x - 10y = 1 \dots\dots\dots (2)$

Por el método de reducción:

x "2", da: $6x + 10y = 4$

x "1", da: $9x - 10y = 1$

Sumando: $15x + 0y = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Reemplazando "x" en (1): $3\left(\frac{1}{3}\right) + 5y = 2$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $5(2x - 1) - 4(5x - 2) = 19 - 2(x + 12)$

2. $7(2x - 5) - (4x - 11) = 9(x - 6) + 29$

3. $23x + 17(x - 3) = 8(1 - 5x) - 59$

4. $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{3} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$

5. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

6. $7(2x - 1)(x + 3) + 5x + 47 = 14(x + 1)^2$

7. $\frac{x}{5} - \frac{x+6}{15} = \frac{2(x+5)}{25}$

$$8. \frac{x}{55} - \frac{3x-11}{66} + \frac{33-x}{44} = 0$$

$$9. \frac{10}{x-3} = \frac{7}{x-2} + \frac{3}{x-5}$$

$$10. \frac{2x+3}{2x-3} - \frac{2x-3}{2x+3} = \frac{12}{4x^2-9}$$

$$11. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$$

$$12. \frac{4(1-x)}{1+2x} = \frac{8}{5}$$

$$13. \frac{a-x}{a} - \frac{b-x}{b} = \frac{2(a-b)}{ab}$$

$$14. \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 7x+4y=13 \\ 5x-2y=19 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{x+y}{8} - \frac{x-y}{6} = 5 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x+4y-z=6 \\ 2x-5y-7z=-9 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$21. 19 - 15(3x+1) = 36 - 6(5x-3) - 5(x+7)$$

- a) -3/2 b) 1/2
c) 1/3 d) 1/8
e) 3/4

$$22. (13x-4)(x+2) = (3x+1)(5x-3) - (2x^2+5)$$

- a) 1 b) 0
c) -1 d) -2
e) 1/2

$$23. \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x} = \frac{5}{2}$$

- a) 7,5 b) 3,5
c) 4,5 d) 2,5
e) 2

$$24. \frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$$

- a) 20 b) 15
c) 30 d) 35
e) 40

$$25. \frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{4}$$

- a) -20 b) -24
c) -30 d) 40
e) 24

26. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{30}{9}$

c) $\frac{20}{9}$ d) $\frac{40}{3}$

e) N.A.

27. $3(x + 1) + 2(x + 3) = 5(x + 1) + 2(x + 2)$

a) 0 b) 1

c) 2 d) 3

e) 4

28. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$

a) -1 b) 0

c) 1 d) 2

e) 3

29. Resolver la ecuación en "x":

$ax^2 - a = b^2x - b; a \neq b \wedge a \neq -b$

a) $\frac{1}{a-b}$ b) $\frac{3}{a+b^2}$

c) $\frac{1}{a+b}$ d) $\frac{1}{a^2-b^2}$

e) $\frac{1}{a+bc}$

30. Después de vender los $\frac{3}{4}$ de una pieza de tela quedan 30m. ¿Cuál era la longitud inicial de la tela?

a) 140m b) 10m

c) 100m d) 120m

e) 310m

31. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Hallar el número.

a) 15 b) 16

c) 17 d) 14

e) 18

32. $\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = 19 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 20y - 5x = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ \frac{x+2x-7y}{13} = 3 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{x+b}{a} + \frac{y-b}{b} = \frac{a+b}{b} \\ \frac{x-a}{b} + \frac{y-a}{a} = -\frac{a+b}{a} \end{cases}$

ECUACIONES DE 2DO GRADO

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Conocida también como ecuación cuadrática y que tiene la forma general:

$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$

Ejemplos: $2x^2 + x + 1 = 0; x^2 + 2 = 0$

PROPIEDADES

ANÁLISIS DE SUS RAÍCES

Sea: $ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$

Se define el discriminante (Δ):

$\Delta = b^2 - 4ac ; a, b, c \in R$

1^{er} CASO

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \text{ raíces reales e iguales} \\ \text{o raíz múltiple (SOLUCIÓN ÚNICA)} \end{cases}$

Ejemplo: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0 \rightarrow \text{c.s.} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2^{do} CASO

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ raíces reales e diferentes}$$

Ejemplo: $x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow$

C.S. = {6 ; -2}

$$\Delta = 16 - 4(1)(-12) > 0$$

3^{er} CASO

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 \text{ raíces complejas, imaginarias y conjugadas}$$

OPERACIONES BÁSICAS CON LAS RAÍCES

Sea: $ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$

SUMA DE RAÍCES: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

PRODUCTO DE RAÍCES: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$

DIFERENCIA DE RAÍCES:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

Reconstrucción de la ecuación de 2do grado a partir de sus raíces:

$$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Suma de Raíces}}x + \underbrace{x_1x_2}_{\text{Producto de raíces}} = 0$$

TEOREMA: Sean las ecuaciones:

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots\dots\dots (1) ; a \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \dots\dots\dots (2) ; m \neq 0$$

Estas ecuaciones serán equivalentes, es decir tienen el mismo C.S. si se cumple:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 6 = 5x$
2. $6x^2 + 19x + 10 = 0$
3. $\frac{1}{10}(x - 1)(x - 2) = 3$
4. $(x - a + 2)(x - a + 3) = 42$
5. $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$
6. $(x + a)^2 - b^2 = 0$
7. $(2x - 1)(2x - 3) = 63$
8. $(3x - 1)^2 + (3x - 2)^2 = 9x^2$
9. $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$
10. $9x + 1 = 3(x - 5) - (x - 3)(x - 2)$
11. $(z - 16)(z + 2) = 25(z + 2)^2$
12. $2 - 3y = \frac{1}{3}(y - 4)(y + 4)$
13. $\frac{2x - a}{3} + \frac{-x}{x + a} = \frac{2x}{4a}$

Encuentre la suma y el producto de la raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 6x - 7 = 0$

2. $x^2 + 7 + 10 = 0$

3. $5x^2 - 15x + 40 = 0$

* Encuentra la ecuación que dio origen a:

1. $x_1 + x_2 = 5$; $x_1x_2 = 6$

2. $x_1 + x_2 = 11$; $x_1x_2 = 10$

3. $x_1 - x_2 = 5$; $x_1x_2 = 150$

4. $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 - x_2 = 5$

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $3x^2 + 2 = 5x$

a) $\left\{ \frac{2}{3}; 1 \right\}$

b) $\left\{ \frac{1}{3}; 2 \right\}$

c) $\left\{ \frac{2}{5}; 1 \right\}$

d) $\left\{ \frac{2}{3}; 2 \right\}$

e) $\left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\}$

2. $6x^2 = x + 222$

a) $\left\{ -6; \frac{7}{3} \right\}$

b) $\left\{ -4; \frac{7}{8} \right\}$

c) $\left\{ -6; \frac{37}{6} \right\}$

d) $\left\{ -3; \frac{7}{6} \right\}$

e) $\left\{ -6; \frac{7}{6} \right\}$

3. $8x + 5 = 36x^2$

a) $\left\{ 1; \frac{3}{2} \right\}$

b) $\left\{ \frac{1}{2}; -\frac{5}{18} \right\}$

c) $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\}$

d) $\left\{ -\frac{5}{18}; \frac{1}{18} \right\}$

e) N.A.

4. $x^2 + 15x = -56$

a) $\{-8; -7\}$

b) $\{-3; -6\}$

c) $\{-2; 5\}$

d) $\{-8; 7\}$

e) $\{7; -6\}$

5. $(5x - 2)^2 - (3x + 1)^2 = x^2 + 60$

a) $\{19; 5\}$

b) $\left\{ \frac{19}{2}; \frac{13}{4} \right\}$

c) $\left\{ -\frac{19}{15}; 3 \right\}$

d) $\left\{ \frac{19}{8}; -\frac{19}{5} \right\}$

e) N.A.

6. $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{10}$

a) $\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$

b) $\left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$

c) $\{1; 2\}$

d) $\{-1; 23\}$

e) N.A.

7. $(x-5)^2 - (x-6)^2 = (2x-3)^2 - 118$

a) $\left\{ -\frac{7}{2}; 7 \right\}$

b) $\left\{ -\frac{7}{4}; 2 \right\}$

c) $\left\{ -3; \frac{7}{2} \right\}$

d) $\left\{ -\frac{7}{4}; \frac{7}{2} \right\}$

e) N.A.

8. $4x^2 + 3x = 22$

- a) $\{-7; 2\}$ b) $\left\{-\frac{7}{2}; 2\right\}$
 c) $\left\{-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right\}$ d) $\left\{-\frac{11}{4}; 2\right\}$
 e) $\left\{-\frac{11}{2}; 4\right\}$

* Encontrar la suma y el producto de las raíces de:

9. $3x^2 - 5x + 4 = 0$

- a) $S = \frac{5}{3}$; $P = \frac{4}{3}$
 b) $S = \frac{5}{2}$; $P = \frac{3}{4}$
 c) $S = 5$; $P = 3$
 d) $S = 5$; $P = \frac{3}{4}$
 e) N.A.

10. $2x^2 - 6x + 18 = 0$

- a) $S = 3$; $P = 8$
 b) $S = 4$; $P = -9$
 c) $S = 3$; $P = 9$
 d) $S = -3$; $P = -9$
 e) N.A.

* Encontrar la ecuación que dio origen a:

11. $x_1 + x_2 = 3$; $x_1x_2 = 4$

- a) $x^2 - 3x + 4 = 0$
 b) $2x^2 - 3x + 8 = 0$
 c) $x^2 + 3x - 4 = 0$
 d) $x^2 - 3x - 4 = 0$
 e) N.A.

12. $x_1 + x_2 = -5$; $x_1x_2 = 25$

- a) $x^2 - 5x + 25 = 0$
 b) $x^2 + 5x + 25 = 0$
 c) $x^2 - 3x + 15 = 0$
 d) $x^2 - 3x + 25 = 0$
 e) N.A.

13. $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 - x_2 = 4$

- a) $x^2 + 2x - 3 = 0$
 b) $6x^2 + 3x - 2 = 0$
 c) $x^2 + x - 2 = 0$
 d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
 e) N.A.

14. $x_1 + x_2 = \frac{-5}{12}$; $x_1x_2 = \frac{-1}{6}$

- a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
 b) $6x^2 + 3x - 2 = 0$
 c) $12x^2 + 5x - 2 = 0$
 d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
 e) N.A.

15. $x_1 + x_2 = \frac{13}{2}$; $x_1x_2 = \frac{-21}{2}$

- a) $2x^2 - 13x - 21 = 0$
 b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
 c) $2x^2 - 3x - 21 = 0$
 d) $2x^2 - 13x + 11 = 0$
 e) N.A.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Cuándo se logra abstraer cantidades en variables, se está innovando el conocimiento matemático que da origen a la formación del **ALGEBRA.**, constituyendo como un nuevo conocimiento matemático abstracto y generalizado.

En el álgebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan mediante letras (variables), las cuales pueden representar todos los valores.

1. DEFINICION DEL ALGEBRA

Rama de la matemática que trata de la cantidad considerada del modo más general, sirviéndose de letras para representarla.

EXPRESION ALGEBRAICA

Es toda asociación de constantes numéricas y letras (variables), entrelazados por cualquiera de los operadores matemáticos de: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, o una combinación limitada de éstos.

Para que una expresión sea considerada algebraica, una variable nunca se debe ubicar como exponente de una potenciación o como índice de una radicación..

Ejemplos

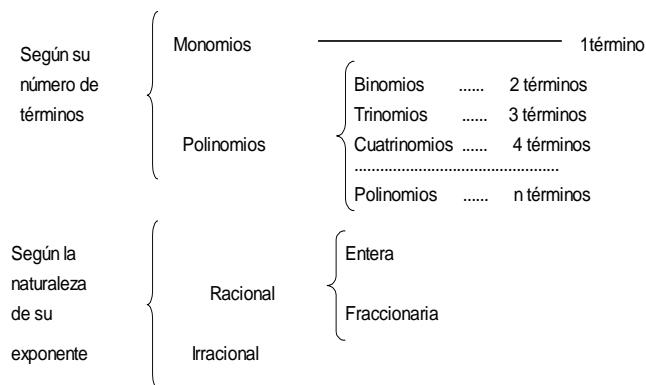
$$25^3 + 5^{-2} - (-3)^{-5}$$

$$3x \sqrt{5x^{-3}} + \sqrt{3x^{-2}} - \sqrt{7x^7}$$

$$-2xy^3 - \sqrt{5+x^3} \quad 2x^{1/2} + xy^{-1/3} - y^{-2}$$

CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se puede realizar de acuerdo a :



1. EXPRESION ALGEBRAICA RACIONAL

Es aquella expresión que se caracteriza porque sus variables tienen exponentes enteros, es decir; ninguna variable(letra) está de exponente fraccionario o radical.

Ejemplos:

$$3x^2 + 5y^2z - 2y^3$$

$$\frac{12xy}{2x-y} - \frac{x^2y^3}{z}$$

EXPRESION ALGEBRAICA RACIONAL ENTERA

Es aquella expresión algebraica cuya parte literal está afectada de exponentes naturales. Eso implica que no tiene letras o variables en el denominador.

Ejemplos:

$$-7$$

$$x^2 - 2x - 3$$

$$5xy - \sqrt{3x^2} + 2y^3$$

EXPRESION ALGEBRAICA RACIONAL FRACCIONARIA

Es aquella expresión algebraica que por lo menos presenta un exponente **ENTERO NEGATIVO** en su parte literal(variable). Eso implica que posee letras en el denominador.

Ejemplo:

$$2x^{-4} \longrightarrow \frac{2}{x^4}$$

$$3xy+x^{-1} \longrightarrow 3xy + \frac{1}{x}$$

$$2x^{-3} - 3y^{-2} + xy^{-1} \longrightarrow \frac{2}{x^3} - \frac{3}{y^2} + \frac{x}{y}$$

2. EXPRESION ALGEBRAICA IRRACIONAL

Es aquella expresión algebraica que por lo menos presenta un exponente fraccionario en su parte literal. Es decir; presenta radicales afectando a la parte literal o variable.

Ejemplos: $x^3y^{1/2}$

$$3xy - \sqrt{xy} + x^2$$

$$\sqrt[3]{x^2y^5z}$$

$$2ab^{-1/3} + a^2$$

$$2x^{1/2} - y^{1/3} - 2$$

OBSERVACIONES

* Las expresiones que no corresponden al concepto de expresión algebraica conforman al conjunto de expresiones no algebraicas ó trascendentes.

* El conjunto de las expresiones algebraicas y las no algebraicas conforman el universo de la expresión matemática.

* Todas las constantes numéricas diferentes de cero son consideradas como expresiones algebraicas **RACIONALES O ENTERAS** de grado igual a cero.

* Sólo la expresión algebraica posee el concepto de grado algebraico.

* Es una expresión algebraica, los exponentes de su parte literal deben estar comprendidos en el campo de los números racionales (Q).

Por lo expuesto; analicemos las expresiones:

$$\sqrt[3]{xy}$$

Es una expresión algebraica irracional

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Es una expresión algebraica racional entera

$$xy + y^{-2}$$

Es una expresión algebraica racional fraccionaria

$$3^4 + \sqrt{\frac{1}{7}} + 5\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Es una constante numérica, por lo que será una expresión algebraica racional entera

$$2^{x+3}$$

No es una expresión algebraica se trata de una expresión trascendente exponencial.

$$(x+1)^x$$

Es una expresión trascendencia exponencial.

$$\cos^2(x^2 - x + 3)$$

Es una expresión trascendente trigonométrica.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty$$

No es una expresión algebraica porque tiene infinitos términos.

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Con la finalidad de fijar correctamente los conceptos antes expuestos, presentamos algunas expresiones algebraicas y su correspondiente clasificación, de acuerdo a la naturaleza de sus exponentes.

- $2x^4 + 6y^5 - 7z^5$ Racional entera
- -7 Racional entera
- $4x^{-3} + 5y^{-3} + 6z^{-2}$ Racional fraccionaria
- $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}z^3 + \frac{1}{4}xy^2$ Racional entera
- $4x^{1/3} + 5y^{1/4} + 3$ Irracional
- $\frac{x}{x+y} - \frac{5}{y+z} + 1$ Racional fraccionaria
- $2\sqrt{x} + 3^5\sqrt{y} - 13$ Irracional
- $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{5}z$ Racional entera
- $5x^2 + 5^3y + 4z^2y^3$ Irracional
- $-5x^3 + 5y^2 + 7z^4$ Racional entera
- $2x^{-2} - 5y^{-3} - \frac{7}{xy}$ Racional fraccionaria

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Clasificar las siguientes expresiones algebraicas, según la naturaleza de sus exponentes:

- 1) $5^{12} + \frac{1}{3} + \sqrt{6}$
- 2) $16x^2 - 12y^2$
- 3) $3xy$
- 4) $2xy - z^2 + y$
- 5) $\sqrt{2}x$
- 6) $5ab^{3/4} + x + b^2$
- 7) $\sqrt{5}y + y^{-1}$

- 8) $\frac{3x}{x+y} - 3x^{-1} + y^{-2}$
- 9) $3x^2 - \sqrt{2}xy - \sqrt{3}z^3$
- 10) $xyz - x + y^2$
- 11) $5\sqrt{x-y} - 2$
- 12) $x^{-2} + y^{-3} + 3x^{-4} - 5$
- 13) $6x^2 - 25xy + y^2$
- 14) $\sqrt{xy^3} + y$
- 15) $2x^2z + z^3$
- 16) $17abc$
- 17) $axy - ay + b^2ym$
- 18) $xyz^3 - x + y^2$
- 19) $3\sqrt{x^3} + y^2x^3$
- 20) $3x^{-2} + x^7 - 11$

Es la expresión algebraica mínima en la cual sus elementos (variables y números) no están separados por el signo "+" o el signo "-". Estando asociados sus elementos con los operadores matemáticos de: Multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplo:

$5xyz$

Es un monomio racional entero.

$-\frac{\sqrt{5}}{7}x^3y^7$

Es un monomio racional entero.

$-\sqrt{xyz}$

Es un monomio irracional.

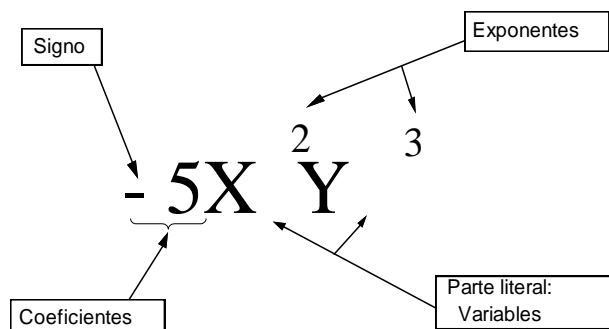
$\sqrt{x}\left(\frac{x}{5} - 3\right)$

Es un monomio irracional.

$x^{-4}yz^2$

Es un monomio racional fraccionario.

Nota: Un término algebraico consta de los siguientes elementos:



Se distingue:

SIGNO Símbolo matemático que indica la cualidad del término, puede ser positivo (+) ó negativo (-).

Ejemplo

$-4x^2y^3$ el signo es “-”

$+7x^5y$ el signo es “+”

Cuando se trata de un término precedido el signo (+) se puede omitir la escritura del mismo.

Ejemplo

$12x^5y^2$ el signo que se antepone es +

COEFICIENTE: Es el número o parámetros que multiplica a la parte literal o variable, considerándose con todo y signo.

Ejemplo

$-4x^2y^3$ el coeficiente es -4

PARTE LITERAL: Conformada por las letras (variables) que aparecen en el término algebraico. **(VARIABLE)**

Ejemplo:

$-4x^2y^3$ La parte literal es xy

EXPONENTE : Número que se coloca en la parte superior derecha de la letra o variable.

Ejemplo

$-4x^2y^3$ el exponente de x es 2. el exponente de y es 3.

OBSERVACIONES

* Si en un término algebraico el coeficiente es un número entero positivo indicará las veces que se debe repetirse como sumando la expresión afectada.

Ejemplo.

$$7x = \underbrace{x + x + x + x + x + x + x}_{7 \text{ veces}}$$

$$120x = \underbrace{x + x + x + \dots + x}_{120 \text{ veces}}$$

$$nx = \underbrace{x + x + x + \dots + x}_{n \text{ veces}} ; (n \in \mathbb{Z}^+)$$

* Si el exponente es un número entero positivo indicará las veces que debe repetirse como producto (factor) la expresión afectada.

Ejemplo:

$$x^7 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{7 \text{ veces}}$$

$$x^{120} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{120 \text{ veces}}$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ veces}}$$

TERMINOS O MONOMIOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes.

Ejemplo:

$$2x^2y^3 \quad ; \quad \frac{15}{4}x^2y^3$$

Son términos algebraicos semejantes porque poseen las mismas variables "x" e "y" afectadas con los mismos exponentes, así:

El exponente de "x" es 2 en ambos monomios.

El exponente de "y" es 3 en ambos monomios.

OBSERVACIONES.

* Los monomios $\frac{3}{85}x^2yz$; $\frac{3}{85}x^2yz$ son semejantes porque poseen iguales variables afectadas de los mismos exponentes, asimismo observamos que presentan igual coeficiente. Por lo tanto; además de ser semejantes, son iguales.

* x^2y^3 ; $3x^4y^2$ no son términos semejantes, presentan las mismas variables pero afectadas de exponentes distintos.

PROPIEDAD ADITIVA DE LOS TERMINOS SEMEJANTES

Si dos o más términos son semejantes estos pueden sumarse algebraicamente atendiendo a sus coeficientes.

Ejemplo

$$\sqrt{abc} + 1997\sqrt{abc} + 26\sqrt{abc} - 15\sqrt{abc}$$

Sumando algebraicamente sus coeficientes: $1 + 1997 + 26 - 15 = 2009$

Luego obtenemos:

$$2009\sqrt{abc}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

01. Si los términos $3m^{a+2}n^{b+1}$; $2m^{b+3}n^4$ son semejantes. Entonces (a+b) es:

Solución:

Si son semejantes, se cumple:

$$a + 2 = b + 3 \longrightarrow a = b + 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$b + 1 = 4 \quad \longrightarrow \quad b = 3 \quad \dots \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$a = 4 \quad , \quad \text{luego:} \quad a + b = 7$$

02. Si $t_1 = abx^a y^3$; $t_2 = 2x^2 yb$, son términos semejantes.

Calcular : $t_1 + t_2$.

Solución:

Por dato: $abx^a y^3$; $2x^2 yb$ son semejantes, luego: $a = 2$; $b = 3$

Se concluye:

$$t_1 = (2)(3) x^2 y^3 = 6x^2 y^3$$

$$t_2 = 2x^2 y^3$$

$$t_1 + t_2 = 8x^2 y^3$$

EJERCICIOS:

01. Calcular el valor de (a + 2b) si los términos siguientes son semejantes:

$$3y^{a+b} ; 2\sqrt{5} y^8 ; -0,2y^{b+3}$$

a) 13 b) 12 c) 15 d) 9 e) N.A.

02. Calcular la suma de los coeficientes sabiendo que t_1 y t_2 son semejantes de variable "x" e "y".

$$t_1 = a^3 bx^{-3} y^2 \quad ; \quad t_2 = ab^3 x^a y^{a+b+1}$$

- a) -198b) -270 c) -300
d) 324 e) N.A.

03. Dar la suma de los coeficientes de los siguientes 3 términos semejantes que tienen a "x" como única variable.

$$3,2x^{m+a} \quad ; \quad -0,2m^2 x^{2+a} \quad ; \quad 0,8 mx^8$$

- a) 2 b) 4 c) 0,8 d) 0,4 e) N.A.

04. Dado los términos algebraicos:

$$t_1 = (m+2a)x \quad ; \quad t_2 = (8+m)x^{3b-3}$$

Calcular el valor de $b^2 + b + 1$.

- a) 13 b) 12 c) 9 d) 8 e) N.A.

05. Indicar el resultado que se obtiene de $P(x) = (a+b)x^a + (a+1)x^{b+1} - abx^5$ si está formado por 3 términos semejantes.

- a) x^5 b) $2x^5$ c) $-3x^5$ d) $-5x^5$ e) N.A.

06. Sabiendo que la expresión:

$$P(x) = (a+b)x^{12} + ax^{b+a} + bx^{2b+4}$$

- a) $24x^{12}$ b) $18x^{12}$ c) $15x^{12}$ d) $12x^{12}$ e) N.A.

07. Considerando que la expresión:

$$F(x) = 2ax^{a^2+b} + 2bx^{4+b} + abx^{2b}$$

Está formada por 3 términos semejantes, reducir la expresión que a continuación se indica:

$$P(x) = 3ax^2 + 2bx^2 - abx^2$$

- a) $6x^2$ b) $8x^2$ c) $3x^2$ d) $2x^2$ e) N.A.

08. Reducir los siguientes términos semejantes, si tienen como única variable a la letra "z".

$$-6mz^m + 5mz^8 - 3mz^8$$

- a) $32z^8$ b) $-16z^8$ c) $-32z^8$ d) z^8
e) Imposible

09. Reducir el siguiente polinomio a su mínima expresión, si todos sus términos son semejantes:

$$P(x) = (a+b)x^3 + 3(a+2b)x^b - 5abx^2$$

- a) $2x^2$ b) x^2 c) $-2x^2$ d) $4x^2$ e) $6x^2$

10. El siguiente término es reducible a un solo término. ¿Cuál es el coeficiente de dicho término?

$$P(x) = (a-c)x^{a+1} - 3acx^7 + (a+c)x^{5-c}$$

- a) 40 b) 25 c) 48 d) 17 e) 1

11. Si todos los términos del siguiente polinomio son semejantes. ¿Cuál es el polinomio reducido?

$$P(y) = (m+t)y^{m+t} + y^8 - (m-t)y^{t+7}$$

- a) y^8 b) $6y^8$ c) $15y^8$ d) $3y^8$ e) $9y^8$

12. Indique el resultado que se obtiene luego de reducir:

$$R = 2\sqrt{18}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{8}x^3 - 2\sqrt{50}x^2 + 3\sqrt{32}x^3 - 4\sqrt{72}x^2$$

13. Después de reducir la expresión:

$$P = 2ab \sqrt{ab} x^n + 3a \sqrt{ab^3} x^n + b \sqrt{a^3 b} x^n . \text{ Se obtiene:}$$

GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. DEFINICION

Se denomina grado de una expresión algebraica a una característica relacionada con los exponentes de sus variables.

Nuestro estudio se centrará en el campo de las expresiones algebraicas racionales enteras, por lo tanto el grado es un número entero y positivo.

Se distinguen dos tipos de grados: el Grado Relativo y el Grado Absoluto.

Cuando hablamos del Grado Relativo nos referimos a una determinada variable de la expresión; y cuando mencionamos el Grado Absoluto, nos referimos a todas las variables de la expresión en discusión.

2. NOTACION

G.A. = Grado Absoluto

G.R. = Grado Relativo

3. GRADOS DE UN MONOMIO ENTERO Y RACIONAL

3.1. El Grado Relativo se refiere sólo a una variable y está dado por el exponente que afecta a dicha variable.

3.2. El Grado Absoluto del monomio está dado por la suma de los exponentes de sus variables (Suma de los grados relativos).

Ejemplo 1: Sea el monomio $5x^7 y^3 z^6$

$GR(x) = 7 \Rightarrow$ Este monomio es de séptimo grado con respecto a "x"

$GR(y) = 3 \Rightarrow$ Este monomio es de tercer grado con respecto a "y"

$GR(z) = 6 \Rightarrow$ Este monomio es de sexto grado con respecto a "z"

$$GA = 7 + 3 + 6$$

$GA = 16 \Rightarrow$ Este monomio es de grado dieciséis con respecto a todas sus letras.

Ejemplo 2: Hallar el coeficiente del monomio:

$$M(x; y) = 2^{3a-b} x^{8a} y^{b-3}$$

Sabiendo que su grado absoluto es 10 y el grado relativo respecto a "y" es 2.

SOLUCION:

EXTRAYENDO LOS DATOS DEL EJEMPLO

$$GR(y) = 2 \Rightarrow b - 3 = 2 \Rightarrow b = 5$$

$GA = 10$, de aquí se concluye:

$$GR(x) = 8 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1$$

CALCULANDO EL COEFICIENTE SOLICITADO.

$$\text{Coeficiente} = 2^{3a-b}$$

$$\text{Coeficiente} = 2^{3(1)-5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

$$\text{Coeficiente} = \frac{1}{4}$$

4. GRADOS DE UN POLINOMIO ENTERO Y RACIONAL

4.1. El Grado Relativo de un polinomio, viene expresado por el mayor exponente que afecta a la variable.

4.2. El Grado Absoluto de un polinomio, se determina ubicando el término que tiene mayor grado absoluto. El mencionado valor viene a ser el grado absoluto del polinomio.

$$4 + 6 + 1 = 11$$

A continuación te presentamos una lista de ejercicios que permitirán en el educando la fijación correcta del contenido teórico. Es necesario precisar que los ejercicios de mayor dificultad tiene como objetivo profundizar el aprendizaje de lo tratado en el Módulo.

1. Calcular el grado relativo y grado absoluto en los monomios.

- a) $32x^7y^4z^5$ f) $M(x; y) = x^7y^{11}$
 b) $\frac{2}{7}x^6y^{17}z^8$ g) $A(x; y; z) = x^5yz^{13}$
 c) $5^{-3}x^4y^9z^3xy^3$ h) $B(x; y) = 3^4x^5y^{12}$
 d) $3^7a^3b^2cm$ i) $M(x; y) = 2^m x^{m+3}y^4$
 e) $-15a^7b^6c^4$ j) $A(x; y) = x^{m+2}y^nab$

2. Calcular el grado relativo y grado absoluto en los polinomios.

- a) $2x^3y^2 - 5xy^7 + 7x^2y^5$
 b) $b(x; y) = 4ax^3 - 3x^2y^6 + 2a^b x^7 + y^7$
 c) $5^3x^6y^9z^2 + x^5y^8z^4 + 2xy^9z^7$
 d) $B(x) = 5x^5 + 3x^4 - 11x^3 + x - 12$
 e) $-3x^2abc^3 - 2^6xa^4b^5 + 4a^3b^2c^9$
 f) $Q(x; y; z) = x^3y^5 - 6yz^8 + 3^3x^2y^4z^9$
 g) $P(x; y) = 2x^3y^4 - 3^3x^2y + x^5$

3. Señalar el coeficiente de:

$$M(x; y) = 8^{a+b} a^{2a} y^{b-2}$$

Sabiendo que su grado absoluto es 7 y el grado relativo respectivo a "y" es 1.

- a) 2^5 b) 2^8 c) 2^{18}
 d) 2^9 e) N.A.

4. Si el monomio:

$$P(x; y) = 3(a + 2b) x^{3a-5} y^{(b+1)/2}$$

El grado relativo de x es 4 y el grado absoluto es 6. Hallar el coeficiente.

5. Calcular "a" y "b" si en el monomio: $x^{a+1} y^{b-3}$ se cumple que su grado absoluto es 12 y $GR(x) = 3 GR(y)$

- a) a=5; b=3 b) a=2; b=5 c) a = b = 3
 d) a=6; b=9 e) N.A.

6. Hallar "n" si es de segundo grado.

$$\frac{\left[\binom{n-2}{3} x^{2n-3} \right]^2 \cdot x^4}{\left[\binom{n}{2} x^4 \right]^2}$$

7. Si en el polinomio:

$P(x; y) = 5^b x^a y^{b+2} - 5^{2a} x^{a+1}$, el grado absoluto es 8, mientras que el grado relativo de "x" es 5. Calcular el valor de "b".

8. Dado el polinomio

$$P(x; y) = x^{a-2} y^{b+5} + 2x^{a-3} y^b + 7x^{a-1} y^{b+6}$$

$$GA = 17; \quad GR(x) = 0,$$

calcular (a - b).

9. Sea $4x^{m+3n+2p} y^{2m+n+3p} z^{3m+2n+p}$ tiene grado absoluto 60. Hallar el grado absoluto de:

$$A(x; y) = -4x^{m+2} y^{n+p+3} z^4$$

10. Hallar (m-p) si el polinomio:

$$4x^{m+p+3} y^{p-2} + 9x^{m+p+1} y^{p+4} - 5x^{m+p-1} y^{p+1}$$
 es de

grado absoluto 14; y se cumple

$$GR(x) = GR(y) + 4.$$

VALOR NUMÉRICO

El político y militar Francois Viette (1540-1603) puede considerarse como el fundador del álgebra moderna. Introdujo la notación algebraica, con lo cual se consiguió que el álgebra se liberase definitivamente de las limitaciones impuestas por la aritmética y se convirtiese en una ciencia puramente simbólica.

1. NOTACION ALGEBRAICA

Veamos los ejemplos:

$$M(x) = 3a \sqrt{x}$$

$$P(x) = -3x^2 + 2x - 5$$

$$Q(x; y) = 5ax^2 - 2abxy + 7y^2$$

Se observa que $M(x)$, $P(x)$ y $Q(x; y)$ son notaciones algebraicas, siendo su uso de mucha importancia pues se especifica las variables que participarán en la expresión.

Cuando se escribe una expresión algebraica mediante una notación se conocerá de inmediato cuáles son las constantes y variables participantes.

1.1 CONSTANTE.- Es toda cantidad que tiene un valor fijo; es decir, permanece con el mismo valor.

1.2 VARIABLE.- Es toda cantidad que no tiene un valor fijo; es decir, cambia de valor.

Ejemplos:

$$1) P(x) = 2a x^5$$

$P \Rightarrow$ Es el nombre genérico de la expresión algebraica (monomio racional entero)

$P(x) \Rightarrow$ Se lee: "Expresión P de variable x"

"Monomio P de variable x"

"Monomio en x"

$2a \Rightarrow$ Constante (coeficiente)

$x \Rightarrow$ Variable

$$2) P(x; y) = ax^2 y^3 + 5x + 3y^4$$

$P \Rightarrow$ Es el nombre genérico del polinomio.

$P(x; y) \Rightarrow$ Se lee:

"Expresión P de variables x e y"

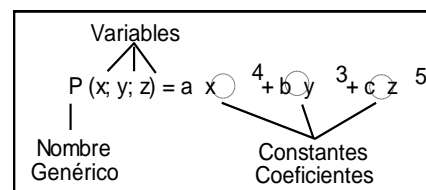
"Polinomio P de variable x e y"

"Polinomio en x e y"

$a, 5, 3 \Rightarrow$ Son las constante

$x, y \Rightarrow$ Son las variables

En general se tendrá:



OBSERVACIONES

En las expresiones: $a^3 + 3a^2 - ab$; $3/5 abc$; $3ab$; $5bc$; $3ax^2 + 2by^2 - 5bz$.

Se observa que no existe una notación que nos indique cuáles son las variables, eso implica que todas las letras participantes deben considerarse como variable.

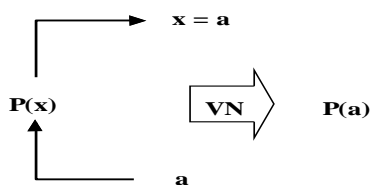
Se observa la notación $P(a; b; x; y)$; nos está indicando que la expresión P al escribirse va a contener las variables a, b, x, y.

En la expresión $P(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^3$ se observa que las constantes son 3, -5, 1.

IMPORTANTE: Es preciso aclarar que las constantes en referencia son coeficientes del término en cuestión.

2. VALOR NUMERICO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA

Se denomina valor numérico (V.N.) de una expresión algebraica al resultado que se obtiene cuando se reemplaza en dicha expresión los valores asignados a sus variables (letras).



En el cuadro anterior se visualiza que P tiene como variable a la letra x, siendo reemplazado por un valor a, luego; se procede a realizar las operaciones indicadas siendo el resultado final su valor numérico.

De lo expuesto:

P(a) se lee:

"Valor numérico del polinomio P(x) cuando x=a"

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

01. Sea el monomio: $3abc^2$

Hallar su valor numérico cuando

$a = 2, b = 3, c = -1.$

SOLUCION:

Para poder determinar el valor numérico del monomio basta reemplazar sus letras por los valores asignados. Así:

$$3abc^2$$

$$V.N. = 3(2)(3)(-1)^2$$

Efectuando: $VN = 18.$

02. Determinar el valor numérico de : $\frac{5a^2b^3}{cd}$.

Si : $a = 3; b = 2; c = 6; d = 10.$

SOLUCION:

Reemplazando los valores en $\frac{5a^2b^3}{cd}$ se tiene:

$$V.N. = \frac{5(3)^2(2)^3}{(6)(10)} = \frac{5 \times 9 \times 8}{6 \times 10} = \frac{360}{60}$$

$$V.N. = 6$$

03. Hallar el valor numérico de: $\frac{2}{3}a^3b^2c^2$

Para $a = 3, b = 4, c = 1/3.$

SOLUCION:

Reemplazando en el monomio los valores asignados a sus letras, se tiene:

$$VN = \frac{2}{3}(3)^3(4)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$VN = \frac{2 \times 27 \times 16}{3 \times 9}$$

$$VN = 2 \times 16$$

$$VN = 32$$

04. Hallar el valor numérico de $7ac\sqrt{2ab}$.

Para $a = 3, b = 6, c = 1/7.$

SOLUCION:

Del monomio se concluye:

$$VN = 7 \times 3 \times \frac{1}{7} \sqrt{2 \times 3 \times 6}$$

$$VN = 3 \sqrt{36}$$

$$VN = 3 \times 6$$

$$VN = 18$$

05. Sea el polinomio $P(x) = 4x^2 - 3x + 5$.

Hallar el valor numérico cuando $x = 2$.

SOLUCION:

Para hallar el valor numérico, sólo se reemplaza el valor asignado a x , y luego se realizan las operaciones indicadas en el polinomio dado.

Reemplazando el valor de $x = 2$ en $P(x)$.

$$P(x) = 4x^2 - 3x + 5$$

$$P(2) = 4(2)^2 - 3(2) + 5; \text{ efectuando:}$$

$$P(2) = 4(4) - 6 + 5$$

$$P(2) = 16 - 6 + 5$$

$$P(2) = 15$$

$$VN = 15$$

Nota: $P(2)$ nos indica el valor numérico (VN) del polinomio cuando $x = 2$.

06. Hallar el V.N. de $3x^2 - 2x^2 + 5x - 2$.

Para $x = -2$.

SOLUCION:

Reemplazando $x = -2$ en el polinomio:

$$VN = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) - 2$$

$$VN = 3(-8) - 2(4) - 10 - 2$$

$$VN = -24 - 8 - 12$$

$$VN = -44$$

07. Si $P(x) = x^3 - 2x + 5$, hallar $P(-3) + P(2) + P(1)$.

SOLUCION:

$P(-3) \Rightarrow$ es el valor numérico de $P(x)$ cuando $x = -3$.

Luego:

$$P(-3) = (-3)^3 - 2(-3) + 5$$

$$P(-3) = -27 + 6 + 5$$

$$P(-3) = -27 + 11 \Rightarrow P(-3) = -16$$

$P(2) \Rightarrow$ Es el valor numérico de $P(x)$ cuando $x = 2$.

Luego:

$$P(2) = 2^3 - 2(2) + 5$$

$$P(2) = 8 - 4 + 5$$

$$P(2) = 4 + 5 \Rightarrow P(2) = 9$$

$P(1) \Rightarrow$ Es el valor numérico de $P(x)$ cuando $x = 1$.

Luego:

$$P(1) = (1)^3 - 2(1) + 5$$

$$P(1) = 1 - 2 + 5 \Rightarrow P(1) = 4$$

Se concluye:

$$P(-3) + P(2) + P(1) = -16 + 9 + 4$$

$$P(-3) + P(2) + P(1) = -3$$

08. Sea el polinomio $P(x, y) = 3x^4 y^2 - 2xy^3$.

Hallar el V.N., para: $x = 2, y = 1/2$.

SOLUCION:

Reemplazando los valores de $x = 2, y = 1/2$ en el polinomio $P(x, y) = 3x^4 y^2 - 2xy^3$.

$$P\left(2, \frac{1}{2}\right) = 3(2)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(2) \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P\left(2, \frac{1}{2}\right) = 3(16) \left(\frac{1}{4}\right) - 2(2) \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$P\left(2, \frac{1}{2}\right) = 12 - \frac{1}{2}$$

$$P\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{23}{2}$$

$$V.N. = \frac{23}{2}$$

09. Sea el polinomio:

$$P(x, y) = 5x^4 - 3xy^2. \text{ Hallar } P(2, 1)$$

SOLUCION:

$$\text{Si } P(x, y) = 5x^4 - 3xy^2$$

Entonces:

$$P(2, 1) = 5(2)^4 - 3(2)(1)^2$$

$$P(2, 1) = 5(16) - 3(2)(1)$$

$$P(2, 1) = 80 - 6$$

$$P(2, 1) = 74$$

Podemos concluir:

$$P(2, 1) = \text{V.N.} = 74$$

10. Sea: $P(x, z) = 2xyz^2 - 3xyz^3 - 2yz.$

Hallar: $P(2, -1).$

SOLUCION :

Reemplazando el valor de las variables:

$$x = 2, \quad z = -1 \quad \text{en } P(x, z).$$

$$P(x, z) = 2xyz^2 - 3xyz^3 - 2yz.$$

$$P(2, -1) = 2(2)(y)(-1)^2 - 3(2)(y)(-1)^3 - 2(y)(-1)$$

$$P(2, -1) = 2(2)(y)(1) - 3(2)(y)(-1) + 2y$$

$P(2, -1) = 4y + 6y + 2y$, sumando términos semejantes.

$$P(2, -1) = 12y.$$

Podemos concluir:

$$P(2, -1) = \text{V.N.} = 12y.$$

11. Dado: $P(x + 2) = 3x + 5$

Hallar: $P(3)$

SOLUCION :

Para ejercicios que presentan la forma anterior se procede de la siguiente manera:

$$P(x+2) = P(3) \Rightarrow x + 2 = 3$$

$$\text{Luego} \quad x = 1$$

Reemplazando $x = 1$ en $P(x+2)$, se tiene:

$$P(x + 2) = 3x + 5$$

↓

$$P(3) = 3(1) + 5 \Rightarrow P(3) = 8$$

12. Dado: $P(y + 3) = 3y^2 - 2y + 5y^3$

Hallar: $P(4)$

SOLUCION:

Igual que en el ejercicio anterior:

$$P(y + 3) = P(4) \Rightarrow y + 3 = 4$$

$$y = 1$$

Reemplazando $y = 1$ en $P(y + 3)$:

$$P(y + 3) = 3y^2 - 2y + 5y^3$$

$$P(4) = 3(1)^2 - 2(1) + 5(1)^3$$

$$P(4) = 3(1) - 2(1) + 5(1)$$

$$P(4) = 3 - 2 + 5$$

$$P(4) = 6$$

13. Dado: $P(2x) = 4x^2 - 3x + 1$

Hallar : $P(2)$

SOLUCION:

Podemos concluir que:

$$P(2x) = P(2) \Rightarrow 2x = 2$$

$$x = 1$$

Luego: $P(2x) = 4x^2 - 3x + 1$

↓

$$P(2x) = 4(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$P(2x) = 4 - 3 + 1$$

$$P(2) = 2$$

14. Dado: $P(2x + 3) = 4x^2 - 3x - 2$

Hallar : (4)

SOLUCION :

$$P(2x + 3) = P(4) \Rightarrow 2x + 3 = 4$$

$$2x = 4 - 3$$

$$2x = 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Reemplazando $x = \frac{1}{2}$ en $P(2x + 3)$

$$P(2x + 3) = 4x^2 - 3x - 2$$

↓

$$P(4) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$P(4) = 4 \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} - 2$$

$$P(4) = 1 - \frac{3}{2} - 2$$

$$P(4) = -\frac{5}{2}$$

A continuación te presentamos un conjunto de ejercicios que procederás a resolver después de que hayas estudiado correctamente la lección. No te engañes plagiando, el éxito en tus estudios depende del empeño y la honradez que pongas en tu propósito.

1. Señalar las constantes y las variables en los siguientes polinomios:

a) $P(x, y) = axy^2 + 2x^3 y$

Constantes:

Variables :

b) $P(m, n) = 2m^3 + 3n^2$

Constantes:

Variables :

c) $P(x, y) = 3x^3 y - 2x^2 - 5y$

Constantes:

Variables :

d) $P(r, s) = abcr^2 - 3abs^2$

Constantes:

Variables :

e) $P(x, y, z) = 3x^2 yz^5 - 41 yz^2 + axz$

Constantes:

Variables :

f) $P(x) = ax^2 + bxy + cy^2$

Constantes:

Variables :

g) $P(a, b) = 3a^2 b + 5b - 7c$

Constantes:

Variables :

02. Hallar el valor numérico de: $4a^2 b^3 c^4$

Para $a = 2, b = -3, c = 1/2$.

a) 27 b) -27 c) 6 d) -6 e) N.A.

03. Hallar el valor numérico de $3ac \sqrt{2ab}$.

Para : $a = 2, b = 9, c = 1/3$.

04. Hallar el valor numérico de : $\frac{4a^2 b^3}{cd}$

Si: $a = 2, b = 3, c = 1/2, d = 1/3$

a) 2582 b) 2632 c) 2692

d) 2592 e) N.A.

05. Hallar el valor numérico de:

$$a + 2b + c.$$

Para : $a = 2, b = 3, c = 7.$

- a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

06. Hallar el valor numérico de: $(a+b)c + d.$

Para : $a = 2, b = 5, c = 3, d = -10.$

- a) 31 b) 21 c) 11 d) -11 e) N.A.

07. Hallar el valor numérico de:

$$(a+b) \cdot c - d + (a+b)(c-d) + a+b \cdot (c-d)$$

Para : $a = 2, b = 3, c = 5, d = 8.$

- a) -4 b) -5 c) 5 d) -2 e) N.A.

08. Hallar el valor numérico de:

$$(a+b+c)(a+b-c) - (a-b+c)(a-b-c)$$

Para : $a = 2, b = -5, c = 8$

- a) -71 b) -40 c) -70 d) 70 e) N.A.

09. Hallar el valor de:

$$E = \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr + 2r^2)$$

Para : $h = 5, R = 10, r = 3.$

- a) 245 b) 47 c) 235 d) 47 e) N.A.

10. Hallar el valor numérico de: $x^y - y^x + 3xy$

Para : $x = 5, y = -2.$

- a) $2 \frac{1}{25}$ b) 2 c) 1 d) $-2 \frac{1}{25}$ e) N.A.

11. Hallar el valor numérico de:

$$(x^{a+1} - 8)(x^{a+1} + 9)$$

Para : $x = 15, a = -1$

- a) 15 b) -70 c) 1 d) -9 e) 72

12. Hallar el V.N. de: $\left[\frac{AB}{3} - 1 - \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right]$

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{5}{9}, a = -\frac{2}{3}, x = \frac{4}{9}$$

- a) 1 b) $\frac{19}{98}$ c) $\frac{17}{108}$ d) $\frac{19}{108}$ e) N.A.

13. Hallar el valor numérico de :

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$$

Para: $x = -2, a = 1, b = 3, c = -3.$

- a) 0,5 b) 1 c) 0,8 d) 0,4 e) 0,7

14. Hallar el V.N. de $2x^3 - 5x^2 + 7x - 6$
para $x = -4.$

- a) -82 b) 238 c) -186 d) -242 e) N.A.

15. Hallar el V.N. de $5x^4 - x^2 - 9x + 3$
para $x = 3$

- a) 362 b) 372 c) 382 d) 390 e) N.A.

16. Hallar el V.N. de la siguiente expresión para

$$x = 2. 3x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 1.$$

- a) 4 b) 5 c) -3 d) 13 e) 3

16. Hallar el valor numérico de:

$$2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Para $x = -3.$

- a) 89 b) 279 c) 79 d) 389 e) 93

18. Sea el polinomio: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.
Hallar el valor numérico para $x = 1/2$.

- a) $1/4$ b) $3/8$ c) -1 d) $5/8$ e) $-5/8$

19. Sea: $P(x) = (5x+2)(3x-3)$. Hallar el valor numérico para $x = 1/3$.

- a) $11/3$ b) 9 c) 3 d) $-22/3$ e) $22/3$

20. Si $f(x) = 4x + 2$.

Hallar $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$.

- a) 48 b) 38 c) 58 d) 28 e) N.A.

21. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Calcular $f(0) + f(1) + f(-1)$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) N.A.

22. Si $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. Hallar $P(4)$.

- a) 148 b) 138 c) 158 d) 168 e) 128

23. Si $P(x) = x^5 - 3x + 6$, hallar E en:

$E = P(2) - P(-2) + P(1) + P(0)$

- a) 52 b) 56 c) 62 d) 72 e) N.A.

24. Si $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

Hallar $P(2) + P(-2)$.

- a) -40 b) 20 c) -20 d) 40 e) 0

25. Si $P(x) = (-x)^x$.

Hallar $P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$.

- a) 232 b) 242 c) -288 d) -242 e) N.A.

26. Sea el polinomio: $P(x, y) = xy^2 - x^2 y$.

Hallar el valor numérico.

Para: $x = 2, y = 1$.

- a) 6 b) 2 c) -2 d) 4 e) N.A.

27. Sea el polinomio:

$P(x, y, z) = xyz^3 - xy^2 z + yxz$.

Hallar el valor numérico para:

$x = -1, y = 1/2, z = 2^{-1}$.

- a) $\frac{3}{16}$ b) $-\frac{2}{16}$ c) $\frac{2}{16}$ d) $-\frac{3}{16}$ e) N.A.

28. En la expresión: $P(x, y) = (3x - y)(x + y)$.

Hallar el valor numérico para: $x = 2, y = 1$.

- a) 8 b) 15 c) 12 d) 13 e) 16

29. Dado el polinomio:

$P(x, y) = 5x^2 y - 3xy^2 - 4xy$.

Hallar el valor numérico para: $x = 1/2, y = -2$.

- a) $4,5$ b) $-4,5$ c) $3,5$ d) $-3,5$ e) N.A.

30. Sea el polinomio:

$P(x, y) = 2x^2 y - 4xy - 2xy^2$.

Calcular: $P(2, 1)$.

- a) -4 b) 4 c) -2 d) 8 e) 2

31. Sea el polinomio:

$P(m, n) = am^2 n + amn - amn^2$.

Calcular: $P = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$

32. Hallar el valor numérico de la expresión:

$-\frac{1}{5} x^4 y^2$ para $x = -2, y = -\frac{1}{2}$

- a) $-4/5$ b) $4/5$ c) $3/5$ d) $-3/5$ e) N.A.

33. Sea el polinomio:

$$P(2x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Hallar $P(4)$

- a) 23 b) 24 c) 25 d) 26 e) 27

34. Dado el polinomio: $P(2x - 1) = 5x^2 - 3x + 2$

Hallar $P(3)$.

- a) 6 b) 8 c) 10 d) 16 e) 12

35. Se tiene el polinomio:

$$P(3x - 1) = 4x^2 - 2x + 3$$

Hallar $P(5)$.

- a) 15 b) 14 c) 13 d) 12 e) N.A.

36. Sea el polinomio: $P(x + 2) = x^2 - 5$.

Hallar: $P(3)$.

- a) 2 b) -3 c) -4 d) -6 e) -2

37. Dado el polinomio: $P(x + 1) = 2x - 3$.

Proporcionar: $E = P(2) + P(0)$

- a) -3 b) 2 c) 3 d) 6 e) -6

38. Dado el polinomio:

$$P(x, 2y) = 4x - 2y. \text{ Señalar: } P(2, 2).$$

- a) 6 b) 4 c) 5 d) 3 e) 1

39. Sabiendo que:

$$P(x) = x^2 + x + 3,$$

Calcular: $E = [P(1) - P(1)]^{P(0)}$

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) 8

40. Si $P(x) = 3x - 1$; $Q(x) = 2x + 3$.

Calcular: $M = [P(2) - Q(-2)]^{P(1)}$

- a) 47 b) 48 c) 49 d) 50 e) N.A.

41. $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = 3x - 1$.

Calcular: $P[Q[P[Q(0)]]]$

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 7 e) N.A.

42. Si: $P(x + 4) = 3x + 13$. Calcular $P(7)$.

- a) 34 b) 22 c) 21 d) 43 e) N.A.

43. Si $P(x-2) = x^2 + x + 1$. Calcular $P(1)$.

- a) 9 b) 3 c) 13 d) 6 e) N.A.

44. Siendo $P(x + 4) = 2x + 1$. Hallar $P(x - 2)$.

- a) $2x - 13$ b) $2x - 12$ c) $2x - 11$
d) $2x - 10$ e) N.A.

45. Sabiendo que $P(x) = 4x^2 - 2$.

Hallar el valor de: $R = \sqrt{P(3) - P(0)}$

- a) 4 b) 5 c) 3 d) 6 e) N.A.

46. Sabiendo que: $P(x) = 6x^2 - 4$.

Hallar: $R = \sqrt{P(2) - P(1) - 2}$

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) N.A.

47. Sabiendo que: $P(x + 2) = 4x + 1$,

hallar $P(0)$.

- a) 2 b) 1 c) -4 d) -6 e) -7

48. Sabiendo que $P(x + 2) = 6x + m$.

Hallar "m" si tenemos como dato que $P(3) = 4$.

- a) 3 b) 4 c) 6 d) -2 e) 5

49. Dado el polinomio:

$$P(x+1 ; y+1) = 3x^2 - 4y^2 - 4y^2 - 2$$

Hallar $P(1; -1)$.

50. Hallar el V.N. de $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^{3+x}$.

Para $x = -2$.

- a) 7 b) -7 c) -40 d) 243 e) N.A.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS

Para sumar o restar dos o más monomios semejantes se suman o restan sus coeficientes y al resultado se le pone la misma parte literal de los monomios semejantes dados.

Ejemplos: Sumar:

$$3xy^2 + 7xy^2 - 2xy^2 = (3 + 7 - 2)xy^2 = 8xy^2$$

$$5xyz^3 + 8xyz^3 = (5x + 8)xyz^3 = 13xyz^3$$

$$ax^ny^m + bx^ny^m - cx^ny^m = (a + b - c)x^ny^m$$

Para sumar o restar dos o más monomios no semejantes, sólo se indica la suma o diferencia de ellos.

Ejemplos: Sumar:

$$3xy + xz = 3xy + 3xz.$$

$$7ab^2 + 8ab - 5b^2a = 7ab^2 + 8ab - 5b^2a \\ = 7ab^2 - 5ab^2 + 8ab = 2ab^2 + 8ab$$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Para hallar el producto de dos monomios se multiplican las coeficientes de ellos. A continuación de este producto se escriben en

orden alfabético, todas las letras de los monomios dados poniendo a cada una un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores.

Ejemplo 1:

Hallar el producto de: $3x^3$ por $2x^2$

Resolución:

$$3x^3 \cdot 2x^2 = (3 \cdot 2) (x^3 \cdot x^2)$$

$(3 \cdot 2) \rightarrow$ Multiplicamos los coeficientes

$(x^3 \cdot x^2) \rightarrow$ Multiplicamos las partes literales

$$3x^3 \cdot 2x^2 = (6)(x^{3+2}) = 6x^5 \rightarrow \therefore 3x^3 \cdot 2x^2 = 6x^5$$

Ejemplo 2:

Hallar el producto de: $8x^4$ por $-9x^2y^3$

Resolución:

$$8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = 8(-9) (x^4 \cdot x^2 \cdot y^3)$$

$$8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = -72x^{4+2} \cdot y^3$$

$$= -72x^6y^3$$

$$\therefore \boxed{8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = -72x^6y^3}$$

RECUERDA

QUE:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

POTENCIAS DE MONOMIOS

La potencia de monomios en un caso particular de la multiplicación de monomios. Es una multiplicación de factores monomios iguales.

Ejemplo 1:

$$(2x^3)^2 = 2x^3 \cdot 2x^3 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{x^3} \cdot \underline{x^3} = \boxed{4x^6}$$

Ejemplo 2:

$$(5a^2)^3 = 5a^2 \cdot 5a^2 \cdot 5a^2 = \underline{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 =$$

$$\boxed{125a^6}$$

NOTA:

PARA HALLAR LA POTENCIA DE UN MONOMIO SE APLICAN LAS PROPIEDADES SIGUIENTES:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \quad ; \quad \boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Ejemplos:

$$(5a^2b)^3 = 5^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = 125a^6z \cdot b^3$$

$$(-3xy^2)^5 = (-3)^5 \cdot x^5(y^2)^5 = 3^5x^5y^{10} = . 243x^5y^{10}$$

$$(-4x^2z)^2 = (-4)^2 = (x^2)^2z^2 = 16x^4z^2$$

$$(-3x^2)^3 \cdot (2x)^2 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot 2^2 \cdot x^2 = -3^3 \cdot x^6 \cdot$$

$$4 \cdot x^2 = -7 \cdot 4x^8 = -108x^8.$$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

Para hallar el cociente de dos monomios se divide el coeficiente del dividendo entre el divisor y a continuación se escriben las letras en orden alfabético poniéndole a cada una un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene el dividendo y el que tiene en el divisor.

Ejemplo 1:

Halla el cociente de dividir: $16x^4 \div 8x^2$

Resolución:

$$\frac{16x^4}{8x^2} = \frac{16}{8} \left(\frac{x^4}{x^2} \right) = 2x^{4-2}$$

$$\boxed{2x^2}$$

RECUERDA QUE:

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 2:

Halla el cociente de dividir: $(-28x^4y^6) \div (7x^3y^2)$

Resolución:

$$\frac{24x^6}{-4x^3} = \frac{24}{-4} \left(\frac{x^6}{x^3} \right) = -6x^{6-3} = \boxed{-6x^3}$$

USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN

En álgebra los signos de agrupación: paréntesis (); corchetes []; llaves { }; barras ____; se usan para agrupar términos y separar operaciones.

Si un signo de agrupación es precedido por un signo positivo, éste se puede suprimir sin variar los signos de los términos que están dentro del signo de agrupación, veamos:

$$a + (+b) = a + b \quad ; \quad a + (-b) = a - b$$

Ejemplo:

$$16x + (-8x + 9y) - 10y$$

$$= 16x - 8x + 9y - 10y$$

$$= 8x - y$$

Se suprimen los paréntesis y no cambian los signos de los términos comprendidos entre ellos.

Si un signo de agrupación es precedido por un signo negativo, lo podemos suprimir cambiando los signos de los términos que están dentro del signo de agrupación, veamos:

$$a - (+b) = a + (-b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

Ejemplo:

$$10a - (6a - 7b) + 4b$$

$$= \underline{10a - 6a} + \underline{7b + 4b}$$

$$= 4a + 11b$$

Se suprimen los paréntesis y se cambian los signos de todos los términos comprendidos entre ellos

EJERCICIOS

Efectuar:

$$8x - (2x - 3) - (-x + 6)$$

Reducir:

$$a - (2,3b - 5,2a) - (-3,5a + 4,2b)$$

Simplificar:

$$(6x - 3y + 5z) - (-4y - 6z - 3x) + x - y + z$$

Efectuar:

$$\frac{1}{4}p - (p - 0,2q) + (0,222\dots q - \frac{3}{6}p) + q$$

Reducir:

$$12a - [-9a - (-2a + 7) + 3a] - 26$$

Reducir:

$$y - \{-y - [-y - \{-y - (-y + x) - x\} + x]\} - x$$

Efectuar:

$$-[-0,2x - [0,4x^2 + (0,05x^2 + 0,7x)]] - x$$

Efectuar:

$$\{(2p - 3) - (3p + 4q)\} - \{2q - (3p + q) - p\}$$

Efectuar

$$\frac{3}{4}a - \left(\frac{2}{4}b - \frac{3}{7}c\right) + \left(-\frac{4}{5}c + \frac{2}{3}b + \frac{1}{4}a\right)$$

Simplificar:

$$-(-4x + y) + (5x + 3y) - (x - y)$$

Reducir:

$$-b - \{-c - [-d - \{-c - (-d - b) + a\} - d] - a\}$$

Simplificar:

$$-\{-q + [-p + \frac{4}{3}q - (-3p - 6q) + \frac{1}{2}p] - 0,3333\dots q\}$$

Reducir:

$$8x^2y + 16x^2y - 10x^2y$$

Reducir:

$$17x^4y^3z^2 + 16x^4y^3z^2 - 28x^4y^3z^2$$

Reducir:

$$10x^2y + 12xy^2 + 2x^2y - 6xy^2 - 8x^2y$$

PROBLEMAS

Hallar el grado absoluto del polinomio:

$$P(x;y;z) = 5x^2y^3z^4 + 7x^4y^7z^9 + 9x^5y^2z^7$$

$$14 \qquad 9 \qquad 20$$

$$18 \qquad 15$$

El monomio: $3x^{a+b-5}y^{b-3}$

Es de G.R.(x) = 5 y G.R.(y) = 2

Entonces "a" vale:

$$1 \qquad 2 \qquad 3$$

$$4 \qquad 5$$

En el polinomio

$$P(x) = x^{m+3} + x^{m+1} + 7$$

El grado absoluto es 10, entonces el valor de "m"

es:

6 7 4
5 9

Si: $x = 2$, $y = -1$, el valor de la expresión $2x^2y - 3xy^2 + xy$, es:

-16 -3 -12
-7 -4

Los 3/2 de:

$$\frac{3y^2 - x^2}{\frac{1}{2}a^3}; \text{ Cuando: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Es:

69 -46 -69
60 -63

Si los términos $6xy^{b-3}$; $2xy^{10}$ son semejantes, calcular el valor de "b"

12 11 13
14 10

Hallar $m \in \mathbb{N}$, sabiendo que el polinomio $P(x)$ es de grado 36.

$$P(x) = 0,2[x^{5m+3}]^2 + \sqrt{7} [x^{m+1}]^3$$

3 6 2
5 8

La expresión:

$$0,2x + \frac{3}{4}y + \frac{3}{5}x - 0,25y \text{ equivale a:}$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y \qquad 0,8x - 0,5y$$

$$\frac{4}{5}x - y \qquad \frac{4}{5}x + 0,5y$$

$$0,6x - 0,5y$$

Al resolver:

$$x - [x - \{y - (2x - y)\} + x - (-y)]$$

Se obtiene:

$$\begin{array}{ccc} 3x - y & x - 3y & x + y \\ x + y & y - x & \end{array}$$

Si: $a = 2$; $b = -4$; $c = -3$; $d = 9$; entonces el valor

$$\text{de } \frac{b}{a} - \frac{d}{c} + 2db \text{ es:}$$

-67 -71 -72
-73 -77

PRODUCTOS NOTABLES

CONCEPTO Son los resultados de cierta multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Binomio Suma o Diferencia al Cuadrado (T.C.P.)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Identidades de Legendre

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Ejemplos:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$(a + 5)^2 - (a - 5)^2 = 4a \cdot 5 = 20a$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^4 = 8 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} (\sqrt{5}^2 + \sqrt{2}^2) = 8\sqrt{10} \cdot 7 = 56\sqrt{10}$$

Diferencia de Cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplos:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

Binomio al Cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Simplificar:

$$N = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$$

Reducir:

$$P = \sqrt{(a + b)(a - b) \cdot b^2}$$

Simplificar:

$$N = \frac{(a + a)(a + b) \cdot ab}{x^2 + (a + b)x}$$

Si: $a + b = 2$ y $ab = 1$, hallar $a^2 + b^2$

Ejemplo:

$$(2 + 3)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3^3$$

$$(2 + 3)^3 = 8 + 36 + 54 + 27$$

$$(2 + 3)^3 = 125$$

Producto de Binomios con Término Común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Producto de Binomios con Término Común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Simplificar:

$$P = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$$

Simplificar:

$$N = (a + b)(a - b) + b^2$$

Si $a + b = 16$, Simplificar: Simplificar

$$Q = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$N = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + 3ab(a + b)}$$

Si $x + \frac{1}{x} = 3$, hallar $x^2 + \frac{1}{x^2}$

Sabiendo que:

$$(x + 1)^2 = 3, \text{ Calcular } x^2 + 2x - 2$$

Si $(a + 2b)(a - 2b) = 0$: $b \neq 0$. calcular $\left(\frac{a}{b}\right)^2$

Si $(x + y + 1)(x + y - 1) = 1$, calcular $(x + y)^2$

Si $a + b = 4$ y $ab = 3$, hallar $a^3 + b^3$

Si: $a - b = 2$ y $ab = 15$, Hallar $a^3 - b^3$

Simplificar:

$$N = \frac{(x + 3)(x + 5)}{x^2 + 8x + 15}$$

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE DIVISIÓN

Coeficientes Separados

En la división de polinomios de una sola variable podemos prescindir de la parte literal.

Ejemplo:

Dividir

$20x^3 - 2x^2 + 16x + 2$ entre $4x - 2$

$$\begin{array}{r}
 20 - 2 - 16 + 8 \quad | \quad 4 - 2 \\
 - 20 + 10 \quad \downarrow \quad | \quad 5 + 2 - 3 \\
 \hline
 + 8 - 16 \quad \downarrow \quad | \quad \boxed{\text{Cociente: } 5x^2 + 2x - 3} \\
 - 8 + 4 \quad \downarrow \quad | \quad \uparrow \\
 \hline
 - 12 + 8 \quad \downarrow \quad | \quad \boxed{\text{Residuo: } 2} \\
 + 12 - 6 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

$Q(x) = 5x^2 + 2x - 3$

$R(x) = 2$

Ejemplo:

Dividir: $x^5 + 2x^4 - x^2 + 3$ entre $x^2 - 2x + 1$

1 2 0 -1 0 3 | 1 -2 1

Cociente $Q(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Cociente $R(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Método de Horner

En primer lugar se trazan dos rectas que se intersecten, una vertical y otra horizontal. Encima de la recta horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo. Encima de la vertical izquierda se coloca el primer coeficiente del divisor con su propio signo en ese mismo sitio y debajo de la horizontal se coloca el resto de coeficientes del divisor con el signo cambiado.

Ejemplo:

Dividir: $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ entre $2x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo} \\
 \text{Divisor} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ -1 \\ 1 \end{array} \right. \quad | \quad \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array}
 \end{array}$$

Para comenzar a dividir se traza otra raya vertical entre los coeficientes del dividendo, el número de columnas a contar de derecha a izquierda es igual al grado del divisor, ésta raya servirá para separar el cociente del residuo. Además se traza otra recta horizontal para colocar debajo de ella la respuesta.

En el ejemplo:

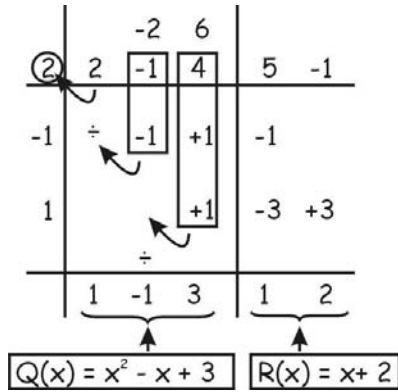
$$\begin{array}{r|cc|cc}
 \textcircled{2} & 2 & -1 & 4 & 5 & -1 \\
 -1 & & & & & \\
 1 & & & & & \\
 \hline
 & \text{Cociente} & & \text{Residuo} & &
 \end{array}$$

Para empezar a dividir

Se divide el primer término del dividendo entre el número encerrado en un círculo el resultado se coloca debajo de la segunda raya horizontal y se multiplica por cada uno de los números que estén a la izquierda, de la raya vertical y debajo de la recta horizontal, colocando los productos debajo de los números que le siguen al primero.

Se suma la siguiente columna, el resultado se divide entre el número encerrado en una circunferencia y se coloca como resultado debajo de la raya horizontal, se procede igual que en el paso anterior.

La operación se realiza hasta completar el resultado correspondiente a todas las columnas, después de la 2da raya vertical, luego de esa raya la suma de las columnas ya no se divide entre el número encerrado en la circunferencia.

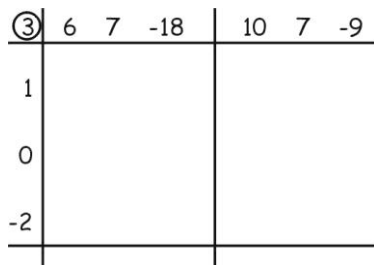


Ejemplo:

Dividir

$$6x^5 + 7x^4 - 18x^3 + 10x^2 + 7x - 9$$

entre $3x^3 + x^2 + 2$



$Q(x) =$ _____

$R(x) =$ _____

Método de Ruffini

Este método es aplicable a divisores de la forma: $(x \pm a)$ y con ciertas restricciones a divisores de la forma $(ax^n \pm b)$.

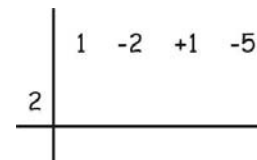
Divisor de la forma $(x \pm a)$

Para dividir por el Método de Ruffini, se trazan dos rayas que se intersectan, una vertical y otra horizontal. Encima de la raya horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo y encima de la raya horizontal y a la izquierda de la vertical se coloca el valor de "x" que anula al divisor.

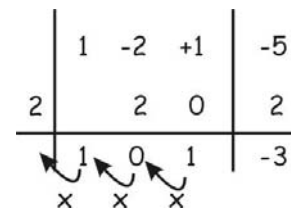
Ejemplo:

Dividir:

$$x^3 - 2x^2 + x - 5 \text{ entre } x - 2$$



Para comenzar a dividir se procede de la siguiente manera:



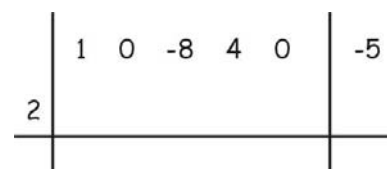
$Q(x) = x^2 + 1$

$R(x) = -3$

Ejemplo:

Dividir

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 5 \text{ entre } x - 2$$



$Q(x) =$ _____

$R(x) =$ _____

TEOREMA DEL RESTO

Este método se emplea para calcular el residuo en forma directa, sin necesidad de efectuar la división. Se emplea cuando el divisor es de la forma $ax \pm b$ o transformable a ella.

Procedimiento:

Se iguala al el divisor a cero encontrándose un valor de la variable.

El valor encontrado se Reemplaza en el polinomio dividendo obteniéndose un resultado el cual será el residuo

Ejemplo:

Calcular el residuo del divisor:

$$3x^3 - 5x^2 + 7 \text{ entre } x - 3$$

Igualamos el divisor a cero

$$x - 3 = 0$$

$$\boxed{x = 3}$$

Este valor de "x" se reemplaza en el dividendo

$$3x^3 - 5x^2 + 7$$

$$\begin{aligned} \text{Residuo (R)} &= 3(3)^3 - 5(3)^2 + 7 \\ &= 3 \cdot 27 + 5 \cdot 9 + 7 \\ &= 81 - 45 + 7 = 43 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Calcular el residuo de dividir:

$$x^3 + +2x^2 - x + 2 \text{ entre } 2x - 1$$

Igualamos el divisor a cero

$$2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = _ _ _}$$

Reemplazando

$$\text{Residuo (R)} = _ _ _ _ _ _$$